■問・練習・深める・問題・演習問題の解答■

第１章　数と式

問・練習・深める（第１節）

練習１
(1)　係数は 4，次数は 5
(2)　係数は -2，次数は 2
(3)　係数は -1，次数は 6

練習２
(1)　x：係数は $-5ay^2$，次数は 3
　　y：係数は $-5ax^3$，次数は 2
　　a：係数は$-5x^3y^2$，次数は 1
(2)　x と y：係数は $2ab$，次数は 4

練習３
(1)　$4x^2-2x-5-3x^2+8x-3$
$=(4-3)x^2+(-2+8)x+(-5-3)$
$=x^2+6x-8$
この多項式は 2 次式
(2)　$3a^2-ab+6b^2-5a^2+9ab-4b^2$
$=(3-5)a^2+(-1+9)ab+(6-4)b^2$
$=-2a^2+8ab+2b^2$
この多項式は 2 次式
(3)　$-2x^4+x^3-8x^2+7x-1+2x^4-3x^3+x+5$
$=(-2+2)x^4+(1-3)x^3-8x^2+(7+1)x+(-1+5)$
$=-2x^3-8x^2+8x+4$
この多項式は 3 次式

(p.9) 深める
数や文字およびそれらを掛け合わせてできる式を単項式，いくつかの単項式の和として表される式を多項式という。よって，多項式でないものは　②

練習４
(1)　x：2 次式，定数項は -3
　　a：1 次式，定数項は $x-3$
(2)　x：2 次式，定数項は ab
(3)　x：3 次式，定数項は $-y^2+1$
　　y：2 次式，定数項は $5x^3+1$
　　x と y：3 次式，定数項は 1

練習５
(1)　$2x^2-1+5x+x^4-3x^3=x^4-3x^3+2x^2+5x-1$
(2)　$2x^2+xy+3y^2-7x-2y+5$
$=2x^2+(y-7)x+(3y^2-2y+5)$

練習６
(1)　$A+B=(4-3)x^3+(-3+1)x^2+(-5-2)x+(2-7)$
$=x^3-2x^2-7x-5$
$A-B=(4+3)x^3+(-3-1)x^2+(-5+2)x+(2+7)$
$=7x^3-4x^2-3x+9$
(2)　$A+B=(2-4)x^3+(-1-1)x^2+2x+(-1+1)$
$=-2x^3-2x^2+2x$
$A-B=(2+4)x^3+(-1+1)x^2-2x+(-1-1)$
$=6x^3-2x-2$
(3)　$A+B=(5-3)x^2+(2+4)xy+(-1-2)y^2$
$=2x^2+6xy-3y^2$
$A-B=(5+3)x^2+(2-4)xy+(-1+2)y^2$
$=8x^2-2xy+y^2$

練習７
$2(A-B)-(4A+B-C)=-2A-3B+C$
$=-2(2x^2+3xy-y^2)-3(-3x^2-xy+2y^2)$
$\qquad+(-x^2+xy+3y^2)$
$=-4x^2-6xy+2y^2+9x^2+3xy-6y^2-x^2+xy+3y^2$
$=(-4+9-1)x^2+(-6+3+1)xy+(2-6+3)y^2$
$=4x^2-2xy-y^2$

練習８
(1)　$2x^4\times7x^2=(2\times7)x^{4+2}=14x^6$
(2)　$4a^5bc^2\times(-3a^4b^3c^2)=\{4\times(-3)\}a^{5+4}b^{1+3}c^{2+2}$
$=-12a^9b^4c^4$
(3)　$(-2x^2y)^3\times(3xy^3)^2=(-2)^3(x^2)^3y^3\times3^2x^2(y^3)^2$
$=(-8)x^6y^3\times9x^2y^6$
$=\{(-8)\times9\}x^{6+2}y^{3+6}$
$=-72x^8y^9$

練習９
(1)　$3x^2(3x^2-5x+2)$
$=3x^2\cdot3x^2+3x^2\cdot(-5x)+3x^2\cdot2$
$=9x^4-15x^3+6x^2$
(2)　$(x^2-2xy-3y^2)(-xy^2)$
$=x^2(-xy^2)-2xy(-xy^2)-3y^2(-xy^2)$
$=-x^3y^2+2x^2y^3+3xy^4$
(3)　$(x^3+3x^2-4)(x-2)$
$=(x^3+3x^2-4)x+(x^3+3x^2-4)\cdot(-2)$
$=x^4+3x^3-4x-2x^3-6x^2+8$
$=x^4+x^3-6x^2-4x+8$
(4)　$(x^3-3+4x^2)(2+x^2)$
$=(x^3+4x^2-3)(x^2+2)$
$=(x^3+4x^2-3)x^2+(x^3+4x^2-3)\cdot2$
$=x^5+4x^4-3x^2+2x^3+8x^2-6$
$=x^5+4x^4+2x^3+5x^2-6$
(5)　$(x+y)(x^2-xy+2y^2)$
$=x(x^2-xy+2y^2)+y(x^2-xy+2y^2)$
$=x^3-x^2y+2xy^2+x^2y-xy^2+2y^3$
$=x^3+xy^2+2y^3$
(6)　$(2x-3y+1)(x+y-2)$
$=(2x-3y+1)x+(2x-3y+1)y+(2x-3y+1)\cdot(-2)$
$=2x^2-3xy+x+2xy-3y^2+y-4x+6y-2$
$=2x^2-xy-3y^2-3x+7y-2$

練習１０

(1)　$(2x+3)^2=4x^2+12x+9$

(2)　$(2x-5y)^2=4x^2-20xy+25y^2$

(3)　$(4x+3)(4x-3)=16x^2-9$

(4)　$(x+2)(x+8)=x^2+10x+16$

(5)　$(x-4)(x-3)=x^2-7x+12$

(6)　$(x-3y)(x+5y)=x^2+2xy-15y^2$

問１

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d)&=(ax+b)cx+(ax+b)d\\&=acx^2+bcx+adx+bd\\&=acx^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}$$

練習１１

(1)　$(2x+3)(6x+5)=12x^2+28x+15$

(2)　$(5x+2)(3x-8)=15x^2-34x-16$

(3)　$(2x-y)(x+3y)=2x^2+5xy-3y^2$

(4)　$(3x-a)(4x-5a)=12x^2-19ax+5a^2$

(p.15) 深める

$(a+b+c+d)(x+y+z)(p+q)$ の展開式は，
$a+b+c+d$，$x+y+z$，$p+q$ のおのおのの式から
１つの項をとって掛け合わせた積の和である。
よって，項の数は　$4\times3\times2=24$ (個)

練習１２

(1)
$$\begin{aligned}(a+b-c)^2&=\{(a+b)-c\}^2\\&=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(x-2y+z)^2&=\{(x-2y)+z\}^2\\&=(x-2y)^2+2(x-2y)z+z^2\\&=x^2-4xy+4y^2+2xz-4yz+z^2\\&=x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx\end{aligned}$$

練習１３

(1)
$$\begin{aligned}(a+b)^2(a-b)^2&=\{(a+b)(a-b)\}^2\\&=(a^2-b^2)^2\\&=a^4-2a^2b^2+b^4\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(x^2+1)(x+1)(x-1)&=(x^2+1)(x^2-1)\\&=(x^2)^2-1=x^4-1\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)\\&=\{(x^2+3)+2x\}\{(x^2+3)-2x\}\\&=(x^2+3)^2-(2x)^2\\&=x^4+6x^2+9-4x^2\\&=x^4+2x^2+9\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(x-y+z)(x+y-z)&=\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}\\&=x^2-(y-z)^2\\&=x^2-(y^2-2yz+z^2)\\&=x^2-y^2-z^2+2yz\end{aligned}$$

練習１４

(1)
$$\begin{aligned}2x^2y-6xy^2+10xyz&=2xy\cdot x-2xy\cdot3y+2xy\cdot5z\\&=2xy(x-3y+5z)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}4xy^2z-x^2yz^2+2xyz&=xyz\cdot4y-xyz\cdot xz+xyz\cdot2\\&=xyz(4y-xz+2)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}a(x-y)-bx+by&=a(x-y)-b(x-y)\\&=(x-y)(a-b)\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}y(5x-3)+2(3-5x)&=y(5x-3)-2(5x-3)\\&=(5x-3)(y-2)\end{aligned}$$

練習１５

(1)　$x^2-8x+16=x^2-2\cdot x\cdot4+4^2=(x-4)^2$

(2)
$$\begin{aligned}4x^2+28xy+49y^2&=(2x)^2+2\cdot2x\cdot7y+(7y)^2\\&=(2x+7y)^2\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}9a^2-48ab+64b^2&=(3a)^2-2\cdot3a\cdot8b+(8b)^2\\&=(3a-8b)^2\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}16x^2-25y^2&=(4x)^2-(5y)^2\\&=(4x+5y)(4x-5y)\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}x^2+6x+8&=x^2+(2+4)x+2\cdot4\\&=(x+2)(x+4)\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}x^2-5xy+6y^2&=x^2+(-2y-3y)x+(-2y)\cdot(-3y)\\&=(x-2y)(x-3y)\end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned}x^2+xy-12y^2&=x^2+(-3y+4y)x+(-3y)\cdot4y\\&=(x-3y)(x+4y)\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}x^2-2ax-15a^2&=x^2+(3a-5a)x+3a\cdot(-5a)\\&=(x+3a)(x-5a)\end{aligned}$$

練習１６

(1)
$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & 1 & \longrightarrow & 2\\ 2 & & 1 & \longrightarrow & 1\\ \hline 2 & & 1 & & 3\end{array}$$

$2x^2+3x+1=(x+1)(2x+1)$

(2)
$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -3 & \longrightarrow & -12\\ 4 & & -3 & \longrightarrow & -3\\ \hline 4 & & 9 & & -15\end{array}$$

$4x^2-15x+9=(x-3)(4x-3)$

(3)
$$\begin{array}{ccccc}2 & \times & -3 & \longrightarrow & -9\\ 3 & & 2 & \longrightarrow & 4\\ \hline 6 & & -6 & & -5\end{array}$$

$6x^2-5x-6=(2x-3)(3x+2)$

(4)
$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -y & \longrightarrow & -3y\\ 3 & & y & \longrightarrow & y\\ \hline 3 & & -y^2 & & -2y\end{array}$$

$3x^2-2xy-y^2=(x-y)(3x+y)$

(5)
$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -4b & \longrightarrow & -12b\\ 3 & & -2b & \longrightarrow & -2b\\ \hline 3 & & 8b^2 & & -14b\end{array}$$

$3a^2-14ab+8b^2=(a-4b)(3a-2b)$

(6)
$$\begin{array}{llll} 1 & & 2a & \longrightarrow\ 8a \\ 4 & & -a & \longrightarrow\ -a \\ \hline 4 & & -2a^2 & \quad\ \ 7a \end{array}$$

$4x^2+7ax-2a^2=(x+2a)(4x-a)$

練習１７

(1) $x^2-4x+4-y^2=(x^2-4x+4)-y^2$
$=(x-2)^2-y^2$
$=\{(x-2)+y\}\{(x-2)-y\}$
$=(x+y-2)(x-y-2)$

(2) $4x^2-y^2+6y-9=4x^2-(y^2-6y+9)$
$=(2x)^2-(y-3)^2$
$=\{2x+(y-3)\}\{2x-(y-3)\}$
$=(2x+y-3)(2x-y+3)$

練習１８

(1) $x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5x^2+4$
$=(x^2-1)(x^2-4)$
$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(2) $x^4-81=(x^2)^2-9^2=(x^2+9)(x^2-9)$
$=(x^2+9)(x+3)(x-3)$

(3) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$
$=\{(x^2+3x)+2\}\{(x^2+3x)-4\}$
$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)$
$=(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$

練習１９

(1) $x^2-yz+zx-y^2=(x-y)z+(x^2-y^2)$
$=(x-y)z+(x+y)(x-y)$
$=(x-y)(x+y+z)$

(2) $9b-9-3ab+a^2=-3b(a-3)+(a^2-9)$
$=-3b(a-3)+(a+3)(a-3)$
$=(a-3)(a-3b+3)$

(3) $2x^2+6xy+x-3y-1=3y(2x-1)+(2x^2+x-1)$
$=3y(2x-1)+(x+1)(2x-1)$
$=(2x-1)(x+3y+1)$

練習２０

(1) $x^2+3xy+2y^2+2x+5y-3$
$=x^2+(3y+2)x+(2y^2+5y-3)$
$=x^2+(3y+2)x+(y+3)(2y-1)$
$=\{x+(y+3)\}\{x+(2y-1)\}$
$=(x+y+3)(x+2y-1)$

$$\begin{array}{llll} 1 & & y+3 & \longrightarrow\ \ y+3 \\ 1 & & 2y-1 & \longrightarrow\ 2y-1 \\ \hline 1 & & (y+3)(2y-1) & \quad\ 3y+2 \end{array}$$

(2) $3x^2-xy-2y^2+6x-y+3$
$=3x^2-(y-6)x-(2y^2+y-3)$
$=3x^2-(y-6)x-(y-1)(2y+3)$
$=\{x-(y-1)\}\{3x+(2y+3)\}$
$=(x-y+1)(3x+2y+3)$

$$\begin{array}{llll} 1 & & -(y-1) & \longrightarrow\ -3y+3 \\ 3 & & 2y+3 & \longrightarrow\ \ 2y+3 \\ \hline 3 & & -(y-1)(2y+3) & \quad\ -y+6 \end{array}$$

練習２１

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$
$=a^2b-ab^2+ac^2-a^2c+bc(b-c)$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(p.21) 深める

$2x^2+7xy+6y^2+5x+7y-3$
$=6y^2+(7x+7)y+(2x^2+5x-3)$
$=6y^2+(7x+7)y+(x+3)(2x-1)$
$=\{2y+(x+3)\}\{3y+(2x-1)\}$
$=(x+2y+3)(2x+3y-1)$

$$\begin{array}{llll} 2 & & x+3 & \longrightarrow\ 3x+9 \\ 3 & & 2x-1 & \longrightarrow\ 4x-2 \\ \hline 6 & & (x+3)(2x-1) & \quad\ 7x+7 \end{array}$$

(p.22) 発展　練習１

(1) $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$

(2) $(x-2)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3$
$=x^3-6x^2+12x-8$

(3) $(3a+b)^3=(3a)^3+3\cdot(3a)^2\cdot b+3\cdot 3a\cdot b^2+b^3$
$=27a^3+27a^2b+9ab^2+b^3$

(4) $(2x-3y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot(3y)^2-(3y)^3$
$=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

(p.23) 発展　練習２

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$
$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$
$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$

別解　（後半）$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ において，
b を $-b$ におき換えると
$\{a+(-b)\}\{a^2-a(-b)+(-b)^2\}=a^3+(-b)^3$
すなわち　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(p.23) 発展　練習３

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$
$=x^3+2^3=x^3+8$

(2) $(x-3)(x^2+3x+9)=(x-3)(x^2+x\cdot 3+3^2)$
$=x^3-3^3=x^3-27$

(3) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$
$=(3x+y)\{(3x)^2-3x\cdot y+y^2\}$
$=(3x)^3+y^3=27x^3+y^3$

(4)　$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

$=(2a-3b)\{(2a)^2+2a\cdot 3b+(3b)^2\}$

$=(2a)^3-(3b)^3=8a^3-27b^3$

(p.23) 発展　練習４

(1)　$x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

(2)　$a^3-64=a^3-4^3=(a-4)(a^2+4a+16)$

(3)　$8x^3-125y^3=(2x)^3-(5y)^3$

$=(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

問題（p.24）

問題１

(1)　与式

$=(3x^2-2x-4)+(2x^3-2x+4)+(-3x^2+3x-12)$

$=2x^3+(3-3)x^2+(-2-2+3)x+(-4+4-12)$

$=2x^3-x-12$

別解

$$\begin{array}{rrrrr} & & 3x^2 & -2x & -\ 4 \\ & 2x^3 & & -2x & +\ 4 \\ +) & & -3x^2 & +3x & -12 \\ \hline & 2x^3 & & -x & -12 \end{array}$$

(2)　与式$=(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)=2x^2+2y^2$

(3)　与式$=(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)=4xy$

問題２

(1)　与式$=10a^2-19ab-56b^2$

(2)　与式$=(2x^2)^2-2\cdot 2x^2\cdot y+y^2$

$=4x^4-4x^2y+y^2$

(3)　与式$=\{(3a+b)-2c\}^2$

$=(3a+b)^2-2(3a+b)\cdot 2c+(2c)^2$

$=9a^2+6ab+b^2-12ac-4bc+4c^2$

$=9a^2+b^2+4c^2+6ab-4bc-12ca$

(4)　与式$=\{(x^2-2x)-1\}\{(x^2-2x)-2\}$

$=(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)+2$

$=x^4-4x^3+4x^2-3x^2+6x+2$

$=x^4-4x^3+x^2+6x+2$

(5)　与式$=\{(a-b)(a+b)\}(a^2+b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$=a^4-b^4$

(6)　与式$=(x^4+1)(x^2+1)\{(x+1)(x-1)\}$

$=(x^4+1)\{(x^2+1)(x^2-1)\}$

$=(x^4+1)(x^4-1)=x^8-1$

(7)　与式$=\{(x-4)(x+4)\}\{(x-1)(x+1)\}$

$=(x^2-16)(x^2-1)$

$=x^4-17x^2+16$

(8)　与式$=\{(x+4)(x-3)\}\{(x+2)(x-1)\}$

$=\{(x^2+x)-12\}\{(x^2+x)-2\}$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

$=x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$

$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

問題３

(1)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 3 & \longrightarrow & 9 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline 3 & & 3 & & 10 \end{array}$$

$3a^2+10a+3=(a+3)(3a+1)$

(2)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -6 & \longrightarrow & -48 \\ 8 & & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \hline 8 & & 18 & & -51 \end{array}$$

$8x^2-51x+18=(x-6)(8x-3)$

(3)

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \times & 4y & \longrightarrow & 20y \\ 5 & & -6y & \longrightarrow & -18y \\ \hline 15 & & -24y^2 & & 2y \end{array}$$

$15x^2+2xy-24y^2=(3x+4y)(5x-6y)$

(4)　$9x^2-30ax-24a^2=3(3x^2-10ax-8a^2)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -4a & \longrightarrow & -12a \\ 3 & & 2a & \longrightarrow & 2a \\ \hline 3 & & -8a^2 & & -10a \end{array}$$

$9x^2-30ax-24a^2=3(3x^2-10ax-8a^2)$

$=3(x-4a)(3x+2a)$

問題４

(1)　与式$=2x(x^2-6xy+9y^2)$

$=2x(x-3y)^2$

(2)　与式$=(4x^2-4xy+y^2)-z^2$

$=(2x-y)^2-z^2$

$=(2x-y+z)(2x-y-z)$

(3)　与式$=(x^2+1)(x^2-4)$

$=(x^2+1)(x+2)(x-2)$

(4)　与式$=\{(ac+bd)+(ad+bc)\}\{(ac+bd)-(ad+bc)\}$

$=\{a(c+d)+b(c+d)\}\{a(c-d)-b(c-d)\}$

$=(a+b)(c+d)(a-b)(c-d)$

別解　与式

$=(a^2c^2+2acbd+b^2d^2)-(a^2d^2+2adbc+b^2c^2)$

$=a^2(c^2-d^2)-b^2(c^2-d^2)$

$=(a^2-b^2)(c^2-d^2)$

$=(a+b)(a-b)(c+d)(c-d)$

問題５

(1)　与式$=(x^3-2x^2y)+(xy-2y^2)$

$=x^2(x-2y)+y(x-2y)$

$=(x^2+y)(x-2y)$

別解　与式$=-\{2y^2+(2x^2-x)y-x^3\}$

$=-(y+x^2)(2y-x)$

$=(x^2+y)(x-2y)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & x^2 & \longrightarrow & 2x^2 \\ 2 & & -x & \longrightarrow & -x \\ \hline 2 & & -x^3 & & 2x^2-x \end{array}$$

(2)　与式$=x^2+(2y-5)x-(3y^2-y-4)$

$$=x^2+(2y-5)x-(y+1)(3y-4)$$
$$=\{x-(y+1)\}\{x+(3y-4)\}$$
$$=(x-y-1)(x+3y-4)$$

$$\begin{array}{lcl} 1 \diagdown\!\!\!\!\diagup & -(y+1) & \longrightarrow -y-1 \\ 1 & 3y-4 & \longrightarrow 3y-4 \\ \hline 1 & -(y+1)(3y-4) & 2y-5 \end{array}$$

(3)　与式$=2x^2+(8a-1)x+(6a^2+a-1)$

$$=2x^2+(8a-1)x+(2a+1)(3a-1)$$
$$=\{x+(3a-1)\}\{2x+(2a+1)\}$$
$$=(x+3a-1)(2x+2a+1)$$

$$\begin{array}{lcl} 1 \diagdown\!\!\!\!\diagup & 3a-1 & \longrightarrow 6a-2 \\ 2 & 2a+1 & \longrightarrow 2a+1 \\ \hline 2 & (3a-1)(2a+1) & 8a-1 \end{array}$$

(4)　与式$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc$

$$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)-abc$$
$$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)$$
$$=(a+b)(b+c)(c+a)$$

問題６

３つの項の積のうち，文字の部分が xyz であるものだけを取り出して考える。

$$x\cdot3y\cdot(-3z)+x\cdot(-z)\cdot(-y)+y\cdot2x\cdot(-3z)$$
$$+y\cdot(-z)\cdot4x+2z\cdot2x\cdot(-y)+2z\cdot3y\cdot4x$$
$$=(-9+1-6-4-4+24)xyz$$
$$=2xyz$$

よって，xyz の項の係数は　2

問題７

(1)　$(x^2+1)^2=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot1+1^2$

$$=x^4+2x^2+1$$

(2)　$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2$

$$=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

問・練習・深める（第２節）

練習２２

(1)　$\dfrac{1}{8}=0.125$

(2)　$\dfrac{8}{9}=0.888\cdots\cdots=0.\dot{8}$

(3)　$\dfrac{7}{33}=0.2121\cdots\cdots=0.\dot{2}\dot{1}$

(4)　$\dfrac{55}{54}=1.0185185\cdots\cdots=1.0\dot{1}8\dot{5}$

練習２３

(1)　$x=0.\dot{1}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 10x= & 1.11\cdots\cdots \\ -) & x= & 0.11\cdots\cdots \\ \hline & 9x= & 1 \end{array}$$

よって　　$x=\dfrac{1}{9}$

(2)　$x=0.\dot{1}\dot{2}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 100x= & 12.1212\cdots\cdots \\ -) & x= & 0.1212\cdots\cdots \\ \hline & 99x= & 12 \end{array}$$

よって　　$x=\dfrac{12}{99}=\dfrac{4}{33}$

(3)　$x=0.\dot{6}4\dot{8}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 1000x= & 648.648648\cdots\cdots \\ -) & x= & 0.648648\cdots\cdots \\ \hline & 999x= & 648 \end{array}$$

よって　　$x=\dfrac{648}{999}=\dfrac{24}{37}$

(4)　$x=6.\dot{2}\dot{7}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 100x= & 627.2727\cdots\cdots \\ -) & x= & 6.2727\cdots\cdots \\ \hline & 99x= & 621 \end{array}$$

よって　　$x=\dfrac{621}{99}=\dfrac{69}{11}$

練習２４

数の範囲	加法	減法	乗法	除法
自然数	○	×	○	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

練習２５

$\pi=3.14\cdots\cdots$

よって　整数部分は3，小数部分は $\pi-3$

練習２６

(1)　$\left|-\dfrac{3}{4}\right|=-\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{4}$

(2)　$|-5+3|=|-2|=-(-2)=2$

(3)　$|-5|+|3|=-(-5)+3=8$

(4)　$3-\pi<0$ であるから

$$|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3$$

練習２７

(1)　$\mathrm{AB}=|4-2|=|2|=2$

(2)　$\mathrm{AB}=|6-(-1)|=|7|=7$

(3)　$\mathrm{AB}=|-7-(-3)|=|-4|=4$

練習２８

(1)　±7

(2)　$\sqrt{25}=5$

(3)　$(\sqrt{7})^2=7$，$(-\sqrt{15})^2=15$

(p.31) 深める
$a<0$ のとき $-a>0$ であるから

$$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a$$

よって，a が負の数のときは，$\sqrt{a^2}=a$ が成り立たない。

問２

４の証明　$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\dfrac{a}{b}$

また，$\sqrt{a}>0$，$\sqrt{b}>0$ であるから　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}>0$

よって，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は $\dfrac{a}{b}$ の正の平方根である。

すなわち　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

５の証明　$(k\sqrt{a})^2=k^2(\sqrt{a})^2=k^2a$

また，$k>0$，$\sqrt{a}>0$ であるから　$k\sqrt{a}>0$

よって，$k\sqrt{a}$ は k^2a の正の平方根である。

すなわち　$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

５の別証　$k>0$，$a>0$ であるから

$$\sqrt{k^2a}=\sqrt{k^2}\sqrt{a}=k\sqrt{a}$$

練習２９

(1)　$4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-7\sqrt{3}=(4+5-7)\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(2)　$3\sqrt{50}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}=15\sqrt{2}-12\sqrt{2}+4\sqrt{2}$
$=(15-12+4)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

(3)　$(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=(\sqrt{7})^2-2^2=7-4=3$

(4)　$(4\sqrt{2}-3\sqrt{3})(5\sqrt{2}+2\sqrt{3})$
$=4\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\cdot5\sqrt{2}$
$-3\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}$
$=40+8\sqrt{6}-15\sqrt{6}-18$
$=22-7\sqrt{6}$

(5)　$(\sqrt{3}+2\sqrt{6})^2=(\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{6}+(2\sqrt{6})^2$
$=3+12\sqrt{2}+24=27+12\sqrt{2}$

(6)　$(3\sqrt{2}-2\sqrt{7})^2=(3\sqrt{2})^2-2\cdot3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{7}+(2\sqrt{7})^2$
$=18-12\sqrt{14}+28=46-12\sqrt{14}$

練習３０

(1)　$\dfrac{18}{\sqrt{6}}=\dfrac{18\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{18\sqrt{6}}{6}=3\sqrt{6}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$
$=\dfrac{2\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}-3$

(3)　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$
$=\dfrac{5+2\sqrt{10}+2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$
$=\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}$

(4)　$\dfrac{3\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{(3\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$
$=\dfrac{21-3\sqrt{21}-\sqrt{21}+3}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$
$=\dfrac{24-4\sqrt{21}}{4}$
$=6-\sqrt{21}$

練習３１

(1)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$
$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$
$=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$

よって

$$x+y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{7}$$

別解　$x+y=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$
$=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$
$=\dfrac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

(2)　$xy=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$

(3)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{7})^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=6$

(4)　$x^2y+xy^2=xy(x+y)=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(p.35) 発展　練習１

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

よって　$x+y=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$
$xy=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{2})^2-2\cdot1=6$

(2)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot1\cdot2\sqrt{2}$
$=16\sqrt{2}-6\sqrt{2}$
$=10\sqrt{2}$

(3)　$x^3y-x^2y^2+xy^3=xy(x^2-xy+y^2)$
$=xy\{(x^2+y^2)-xy\}$
$=1\cdot(6-1)$
$=5$

(p.36) 発展　練習１

(1)　$\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{(5+2)+2\sqrt{5\cdot 2}}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

(2)　$\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}$

$=\sqrt{(9+3)-2\sqrt{9\cdot 3}}$

$=\sqrt{9}-\sqrt{3}$

$=3-\sqrt{3}$

(3)　$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(5+1)+2\sqrt{5\cdot 1}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$

問題（p.37）

問題８

(1)　$x=0.\dot{5}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 10x= & 5.55\cdots\cdots \\ -) & x= & 0.55\cdots\cdots \\ \hline & 9x= & 5 \end{array}$$

よって　$x=\dfrac{5}{9}$

(2)　$x=3.\dot{2}\dot{5}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 100x= & 325.2525\cdots\cdots \\ -) & x= & 3.2525\cdots\cdots \\ \hline & 99x= & 322 \end{array}$$

よって　$x=\dfrac{322}{99}$

(3)　$x=0.\dot{1}23\dot{4}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 10000x= & 1234.1234\cdots\cdots \\ -) & x= & 0.1234\cdots\cdots \\ \hline & 9999x= & 1234 \end{array}$$

よって　$x=\dfrac{1234}{9999}$

(4)　$x=0.3\dot{2}\dot{1}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 1000x= & 321.2121\cdots\cdots \\ -) & 10x= & 3.2121\cdots\cdots \\ \hline & 990x= & 318 \end{array}$$

よって　$x=\dfrac{318}{990}=\dfrac{53}{165}$

別解　$x=0.3\dot{2}\dot{1}$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 100x= & 32.12121\cdots\cdots \\ -) & x= & 0.32121\cdots\cdots \\ \hline & 99x= & 31.8 \end{array}$$

よって　$x=\dfrac{31.8}{99}=\dfrac{318}{990}=\dfrac{53}{165}$

問題９

(1)　$|3-1|+|3+2|=|2|+|5|=2+5=7$

(2)　$|0-1|+|0+2|=|-1|+|2|=-(-1)+2=3$

(3)　$|-1-1|+|-1+2|=|-2|+|1|=-(-2)+1=3$

(4)　$|-\sqrt{3}-1|+|-\sqrt{3}+2|$

$=-(-\sqrt{3}-1)+(-\sqrt{3}+2)$

$=3$

問題１０

(1)　与式$=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

$=(2+3-5)\sqrt{5}=0$

(2)　与式$=4\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(3)　与式$=(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})(\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

$=2(\sqrt{3})^2+(6-5)\sqrt{3}\sqrt{2}-15(\sqrt{2})^2$

$=2\cdot 3+\sqrt{6}-15\cdot 2=\sqrt{6}-24$

(4)　与式$=(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})(\sqrt{6}+6\sqrt{2})$

$=2(\sqrt{6})^2+(12-3)\sqrt{6}\sqrt{2}-18(\sqrt{2})^2$

$=2\cdot 6+9\sqrt{12}-18\cdot 2=18\sqrt{3}-24$

(5)　与式$=\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}^2$

$=(1+\sqrt{2})^2+2(1+\sqrt{2})\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=1+2\sqrt{2}+2+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+3$

$=6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

(6)　与式$=\{(2-\sqrt{3})+\sqrt{7}\}\{(2-\sqrt{3})-\sqrt{7}\}$

$=(2-\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2$

$=4-4\sqrt{3}+3-7$

$=-4\sqrt{3}$

問題１１

(1)　与式

$=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{\sqrt{15}-3}{2}$

$=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(2)　与式

$=\dfrac{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}-\dfrac{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{7+\sqrt{21}+\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}-\dfrac{7-\sqrt{21}-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$

$=\dfrac{2\sqrt{7}+2\sqrt{21}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{21}}{2}$

(3)　与式

$=\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$+\dfrac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$

$=-(1-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-2)$

$=1$

問題１２

(1) $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに　$x+y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=3$

$xy=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=1$

よって

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot1=7$

(2) $x-y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

よって

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=3\cdot(-\sqrt{5})=-3\sqrt{5}$

問題１３

$\dfrac{1}{37}=0.027027\cdots\cdots=0.\dot{0}2\dot{7}$

小数第 1 位から，3 個の数字の配列 027 が繰り返される。$100=3\cdot33+1$ であるから，小数第 100 位の数字は，027 の 1 番目の数字で，0 である。

問題１４

$(-2)^3=-8<0$ であるから

$\sqrt{\{(-2)^3\}^2}=-(-2)^3$

すなわち　$\sqrt{\{(-2)^3\}^2}\neq(-2)^3$

他の等号はすべて正しいから，誤っているのは　⑤

問題１５

(1) $1^2<3<2^2$　すなわち　$1<\sqrt{3}<2$

よって　整数部分は 1，小数部分は $\sqrt{3}-1$

$\boxed{参考}$　$\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$ より，整数部分は 1 としてもよい。

(2) $3^2<10<4^2$　すなわち　$3<\sqrt{10}<4$

よって　整数部分は 3，小数部分は $\sqrt{10}-3$

(3) $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$，$5^2<28<6^2$ より　$5<\sqrt{28}<6$

すなわち　$5<2\sqrt{7}<6$

よって　整数部分は 5，小数部分は $2\sqrt{7}-5$

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$

よって　整数部分は 2,

小数部分は $(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$

問・練習・深める（第３節）

練習３２

(1) $x+8>3x$　　(2) $-4\leqq\dfrac{x}{2}-5\leqq0$

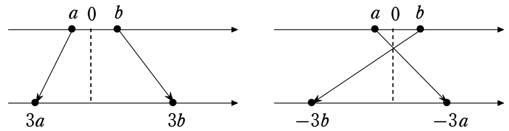
(3) $-3\leqq a+b<0$

問３

(1) $a<0$，$b>0$ の場合。下の数直線から，次のことがわかる。

$a<b$ のとき　$3a<3b$

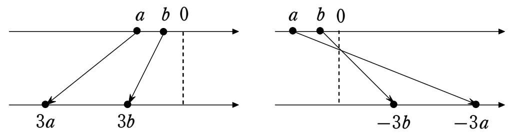
$a<b$ のとき　$-3a>-3b$



(2) $a<0$，$b<0$ の場合。下の数直線から，次のことがわかる。

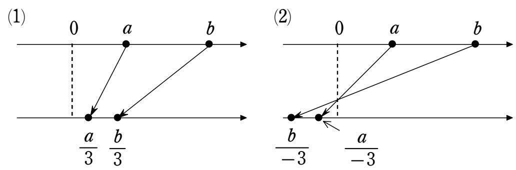
$a<b$ のとき　$3a<3b$

$a<b$ のとき　$-3a>-3b$



問４

(1) $\dfrac{a}{3}<\dfrac{b}{3}$　　(2) $\dfrac{a}{-3}>\dfrac{b}{-3}$



練習３３

(1) $a-2<b-2$

(2) $-5a>-5b$

(3) $-\dfrac{a}{8}>-\dfrac{b}{8}$

(4) $-a>-b$ より　$1-a>1-b$

練習３４

(1) $5x-8\leqq22$

両辺に 8 を加えると　$(5x-8)+8\leqq22+8$

すなわち　$5x\leqq30$

両辺を 5 で割って　$x\leqq6$

(2) $4x+15\geqq3$

両辺から 15 を引くと　$(4x+15)-15\geqq3-15$

すなわち　$4x\geqq-12$

両辺を 4 で割って　$x\geqq-3$

(3) $-6x+5>29$

両辺から 5 を引くと　$(-6x+5)-5>29-5$

すなわち　$-6x>24$

両辺を -6 で割って　$x<-4$

(p.41) 深める

例 30：両辺から 5 を引くときに性質 1，両辺を 3 で割るときに性質 2 が使われている。

例 31：両辺に 2 を加えるときに性質 1，両辺を -4 で割るときに性質 3 が使われている。

練習３５

(1)　$3x+6>16-2x$

移項すると　$3x+2x>16-6$

すなわち　$5x>10$

よって　$x>2$

(2)　$4x-7\leqq 7x+8$

移項すると　$4x-7x\leqq 8+7$

すなわち　$-3x\leqq 15$

よって　$x\geqq -5$

(3)　$5(3x-1)\geqq 8x+1$

左辺を展開すると　$15x-5\geqq 8x+1$

移項すると　$15x-8x\geqq 1+5$

すなわち　$7x\geqq 6$

よって　$x\geqq \dfrac{6}{7}$

(4)　$3(x-2)>2(5x-3)$

展開すると　$3x-6>10x-6$

移項すると　$3x-10x>-6+6$

すなわち　$-7x>0$

よって　$x<0$

(5)　$\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{3}<\dfrac{1}{2}(x-2)$

両辺に 12 を掛けると　$9x-8<6x-12$

移項すると　$9x-6x<-12+8$

すなわち　$3x<-4$

よって　$x<-\dfrac{4}{3}$

(6)　$0.3x+0.4\geqq 0.8-0.1x$

両辺に 10 を掛けると　$3x+4\geqq 8-x$

移項すると　$3x+x\geqq 8-4$

すなわち　$4x\geqq 4$

よって　$x\geqq 1$

(p.42) 深める

$ax+b>0$ より　$ax>-b$

(1)　$a>0$ のとき，両辺を a で割ると　$x>-\dfrac{b}{a}$

(2)　$a<0$ のとき，両辺を a で割ると　$x<-\dfrac{b}{a}$

練習３６

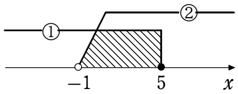
(1)　$2x+7\geqq 4x-3$ から　$-2x\geqq -10$

よって　$x\leqq 5$　……①

$3x+5>-2x$ から　$5x>-5$

よって　$x>-1$　……②

① と ② の共通範囲を求めて　$-1<x\leqq 5$



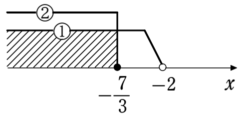
(2)　$4x+1<3x-1$ から

$x<-2$　……①

$2x-1\geqq 5x+6$ から　$-3x\geqq 7$

よって　$x\leqq -\dfrac{7}{3}$　……②

① と ② の共通範囲を求めて　$x\leqq -\dfrac{7}{3}$



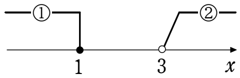
(3)　$x-2\geqq 4x-5$ から　$-3x\geqq -3$

よって　$x\leqq 1$　……①

$3(x-1)>2x$ を展開すると　$3x-3>2x$

よって　$x>3$　……②

① と ② の共通範囲はないから，解はない。



練習３７

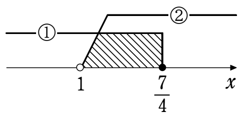
$5x-6\leqq x+1$ から　$4x\leqq 7$

よって　$x\leqq \dfrac{7}{4}$　……①

$x+1<2x$ から　$-x<-1$

よって　$x>1$　……②

① と ② の共通範囲を求めて　$1<x\leqq \dfrac{7}{4}$



練習３８

菓子 A を x 個買うとすると，菓子 B は $(20-x)$ 個買うことになる。条件から

$$200x+100(20-x)+120\leqq 3000$$

整理すると　$100x\leqq 880$

よって　$x\leqq \dfrac{880}{100}=8.8$

これを満たす最大の整数は 8 である。

よって，菓子 A は最大で 8 個買える。

練習３９

分速 150 m で走る道のりを x m とすると，分速 60 m で歩く道のりは，$(2400-x)$ m である。条件から

$$\frac{x}{150}+\frac{2400-x}{60}\leqq 30$$

整理すると　$-3x\leqq -3000$

よって　$x\geqq 1000$

したがって，分速 150 m で走る道のりを 1000 m 以上にしなければならない。

練習４０

(1)　$|x|=4$ の解は　$x=\pm 4$

(2)　$|x|<2$ の解は　$-2<x<2$

(3)　$|x|\geqq 5$ の解は　$x\leqq -5$，$5\leqq x$

練習４１

(1)　$|3x-4|=2$ から　$3x-4=\pm 2$

すなわち　$3x=6$　または　$3x=2$

よって　$x=2$，$\dfrac{2}{3}$

(2)　$|x-2|\leqq 3$ から　$-3\leqq x-2\leqq 3$

よって　$-1\leqq x\leqq 5$

(3)　$|2x+1|>1$ から

　$2x+1<-1$　または　$1<2x+1$

よって　　$x<-1$，$0<x$

(p.46) 研究　練習１

(1)　[1]　$x-3 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 3$ のとき

方程式は　　$x-3=5x$

これを解くと　　$x=-\dfrac{3}{4}$

これは $x \geqq 3$ を満たさない。

[2]　$x-3<0$ すなわち $x<3$ のとき

方程式は　　$-x+3=5x$

これを解くと　　$x=\dfrac{1}{2}$

これは $x<3$ を満たす。

[1]，[2] から，求める解は　$x=\dfrac{1}{2}$

(2)　[1]　$x+2 \geqq 0$ すなわち $x \geqq -2$ のとき

不等式は　　$x+2>3x$

これを解くと　　$x<1$

これと $x \geqq -2$ との共通範囲は

　$-2 \leqq x<1$　……①

[2]　$x+2<0$ すなわち $x<-2$ のとき

不等式は　$-x-2>3x$

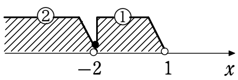
これを解くと　　$x<-\dfrac{1}{2}$

これと $x<-2$ との共通範囲は

　$x<-2$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で

　$x<1$



(3)　[1]　$x-2 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 2$ のとき

不等式は　$x-2<2x-1$

これを解くと　$x>-1$

これと $x \geqq 2$ との共通範囲は

　$x \geqq 2$　……①

[2]　$x-2<0$ すなわち $x<2$ のとき

不等式は　$-x+2<2x-1$

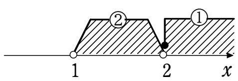
これを解くと　$x>1$

これと $x<2$ との共通範囲は

　$1<x<2$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で

　$x>1$



問題（p.47）

問題１６

(1)　展開すると　$7x+14+6-2x<0$

すなわち　$5x+20<0$

移項すると　　$5x<-20$

よって　　　$x<-4$

(2)　展開すると　$2x-10-6x+9 \geqq 0$

すなわち　$-4x-1 \geqq 0$

移項すると　　$-4x \geqq 1$

よって　　　$x \leqq -\dfrac{1}{4}$

(3)　両辺に 12 を掛けると

　$4(2x+1)-3(x-1)>12$

展開して整理すると　$5x+7>12$

移項して整理すると　　$5x>5$

よって　　　$x>1$

(4)　両辺に 6 を掛けると

　$18+2(4-2x)>9x+5$

展開して整理すると　$-4x+26>9x+5$

移項して整理すると　　$-13x>-21$

よって　　　$x<\dfrac{21}{13}$

問題１７

x は負の数であるから　　$x<0$　……①

不等式の右辺を展開して整理すると

　$3x-5<7x+11$

移項して整理すると　$-4x<16$

よって　　$x>-4$　……②

①，② から　$-4<x<0$

x は整数であるから

　$x=-1$，-2，-3

問題１８

会員になる場合のシャツ１枚のクリーニング代は

$$220 \times \frac{95}{100}=209$$

より 209 円である。

1 年間にシャツを x 枚クリーニングに出すとすると，条件から

　$1000+209x<220x$

整理すると　　$11x>1000$

よって　　　$x>\dfrac{1000}{11}=90.9\cdots$

これを満たす最小の自然数は 91 である。

答　91 枚以上

問題１９

(1)　$x-5<4x+2$ から　$-3x<7$

すなわち　$x>-\dfrac{7}{3}$　……①

$\dfrac{x-1}{2} \leqq \dfrac{3x+1}{4}-x$ の両辺に 4 を掛けると

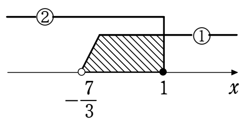
　$2(x-1) \leqq 3x+1-4x$

すなわち　$2x-2 \leqq -x+1$

よって　$3x \leqq 3$

ゆえに　$x \leqq 1$　……②

① と ② の共通範囲を求めて　　$-\dfrac{7}{3}<x \leqq 1$



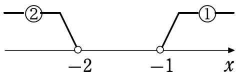
(2) $2x+3>x+2$ から　$x>-1$　……①

$3x>4x+2$ から　$-x>2$

すなわち

$x<-2$　……②

①と②の共通範囲はないから，解はない。



(3) $\dfrac{x+9}{3}\geqq 2-x$ の両辺に 3 を掛けると

$x+9\geqq 6-3x$

よって　$4x\geqq -3$

すなわち　$x\geqq -\dfrac{3}{4}$　……①

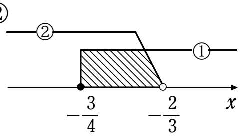
$2-x>\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{3}$ の両辺に 6 を掛けると

$12-6x>9x+22$

よって　$-15x>10$

すなわち　$x<-\dfrac{2}{3}$　……②

①と②の共通範囲を求めて　$-\dfrac{3}{4}\leqq x<-\dfrac{2}{3}$



問題２０

(1) $|3x-2|=10$ から　$3x-2=\pm 10$

すなわち　$3x=12$　または　$3x=-8$

よって　$x=4,\ -\dfrac{8}{3}$

(2) $|2x+5|>1$ から　$2x+5<-1$　または　$1<2x+5$

整理すると　$2x<-6$　または　$-4<2x$

各辺を 2 で割って　$x<-3,\ -2<x$

(3) $|5x-3|\leqq 12$ から　$-12\leqq 5x-3\leqq 12$

各辺に 3 を加えて　$-9\leqq 5x\leqq 15$

各辺を 5 で割って　$-\dfrac{9}{5}\leqq x\leqq 3$

問題２１

$2\leqq |x-3|$ から　$x-3\leqq -2$　または　$2\leqq x-3$

整理すると　$x\leqq 1,\ 5\leqq x$　……①

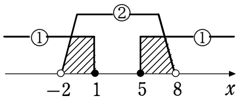
$|x-3|<5$ から　$-5<x-3<5$

各辺に 3 を加えて

$-2<x<8$　……②

①と②の共通範囲を求めて

$-2<x\leqq 1,\ 5\leqq x<8$



問題２２

$5x-8\geqq 7x-2$ から　$-2x\geqq 6$

すなわち　$x\leqq -3$　……①

$2x+a\leqq 3x+9$ から　$-x\leqq 9-a$

すなわち　$x\geqq a-9$　……②

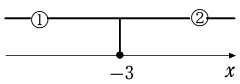
①と②の共通範囲が

$x=-3$ となるのは

$a-9=-3$

のときである。

よって　$a=6$



演習問題（p.48，p.49）

演習問題１

(1) 与式$=\{x^2-(a+b)x+ab\}(x-c)$

$=x^3-(a+b)x^2+abx-cx^2+c(a+b)x-abc$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

(2) 与式$=\{(x-1)(x-3)\}(x^2-4x)$

$=\{(x^2-4x)+3\}(x^2-4x)$

$=(x^2-4x)^2+3(x^2-4x)$

$=x^4-8x^3+16x^2+3x^2-12x$

$=x^4-8x^3+19x^2-12x$

(3) 与式$=\{(x+1)(x-5)\}\{(x+2)(x-6)\}$

$=\{(x^2-4x)-5\}\{(x^2-4x)-12\}$

$=(x^2-4x)^2-17(x^2-4x)+60$

$=x^4-8x^3+16x^2-17x^2+68x+60$

$=x^4-8x^3-x^2+68x+60$

(4) 与式$=\{(x-2)(x+2)\}^2(x^2+4)^2$

$=(x^2-4)^2(x^2+4)^2$

$=\{(x^2-4)(x^2+4)\}^2$

$=(x^4-16)^2$

$=x^8-32x^4+256$

演習問題２

(1) 与式$=\{2(x+y)+1\}\{3(x+y)-2\}$

$=(2x+2y+1)(3x+3y-2)$

(2) 与式$=\{x+(y-z)\}\{3x-2(y-z)\}$

$=(x+y-z)(3x-2y+2z)$

(3) 与式$=(x-y)^2-2(x-y)-8$

$=\{(x-y)+2\}\{(x-y)-4\}$

$=(x-y+2)(x-y-4)$

(4) 与式$=\{2(x+y)+1\}\{(x+y)+1\}-10$

$=2(x+y)^2+3(x+y)-9$

$=\{(x+y)+3\}\{2(x+y)-3\}$

$=(x+y+3)(2x+2y-3)$

演習問題３

(1) $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

$x\geqq 1$ のとき，$|x-1|=x-1$ であるから

$\sqrt{(x-1)^2}=x-1$

$x<1$ のとき，$|x-1|=-(x-1)$ であるから

$\sqrt{(x-1)^2}=-(x-1)=-x+1$

(2) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}$

$=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$

$=|x+1|-|x-1|$

$-1\leqq x<1$ のとき，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=-(x-1)$ であるから

$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}$

$=(x+1)+(x-1)$

$=2x$

演習問題４

(1) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

$=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{9-5}$

$=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$=3$

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=3^2-2=7$

(3) $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

よって

$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=3\cdot(-\sqrt{5})=-3\sqrt{5}$

(4) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=7^2-2=47$

(5) $x^4-\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=7\cdot(-3\sqrt{5})$

$=-21\sqrt{5}$

演習問題５

$1-\sqrt{2}<0$ であるから，$(1-\sqrt{2})x>-1$ より

$$x<\frac{-1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

すなわち　$x<\sqrt{2}+1$　……①

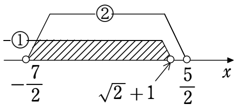
$|2x+1|<6$ から　$-6<2x+1<6$

$-7<2x<5$　すなわち　$-\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{5}{2}$　……②

$\sqrt{2}+1=2.4\cdots$，$\dfrac{5}{2}=2.5$ から

$\sqrt{2}+1<\dfrac{5}{2}$

①と②の共通範囲を求めて



$-\dfrac{7}{2}<x<\sqrt{2}+1$

演習問題６

(1) $ax\geqq 3$

[1] $a>0$ のとき

両辺を正の数 a で割って　　$x\geqq\dfrac{3}{a}$

[2] $a=0$ のとき

与えられた不等式は $0\cdot x\geqq 3$ となり，解はない。

[3] $a<0$ のとき

両辺を負の数 a で割って　　$x\leqq\dfrac{3}{a}$

答　$a>0$ のとき $x\geqq\dfrac{3}{a}$，$a=0$ のとき解はない，

$a<0$ のとき $x\leqq\dfrac{3}{a}$

(2) $ax+8<4x+2a$

移項すると　　$ax-4x<2a-8$

よって　　　$(a-4)x<2(a-4)$

[1] $a-4>0$ すなわち $a>4$ のとき

両辺を正の数 $a-4$ で割って　　$x<2$

[2] $a-4=0$ すなわち $a=4$ のとき

与えられた不等式は $0\cdot x<2\cdot 0$ となり，解はない。

[3] $a-4<0$ すなわち $a<4$ のとき

両辺を負の数 $a-4$ で割って　　$x>2$

答　$a>4$ のとき $x<2$，$a=4$ のとき解はない，

$a<4$ のとき $x>2$

演習問題７

(1) 与式$=\{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\}$

$=(a+b)^2-(c+d)^2$

$=(a^2+2ab+b^2)-(c^2+2cd+d^2)$

$=a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd$

(2) 与式

$=\{(a+b+c)+(a-b-c)\}\{(a+b+c)-(a-b-c)\}$

$=2a(2b+2c)$

$=4ab+4ac$

演習問題８

(1) 与式$=2x^2+(3y+1)x+(y^2+2y-3)$

$=2x^2+(3y+1)x+(y-1)(y+3)$

$=\{x+(y-1)\}\{2x+(y+3)\}$

$=(x+y-1)(2x+y+3)$

$$\begin{array}{lcr}
1 & y-1 & \longrightarrow\ 2y-2 \\
2 & y+3 & \longrightarrow\ y+3 \\
\hline
2 & (y-1)(y+3) & 3y+1
\end{array}$$

別解　与式$=y^2+(3x+2)y+(2x^2+x-3)$

$=y^2+(3x+2)y+(x-1)(2x+3)$

$=\{y+(x-1)\}\{y+(2x+3)\}$

$=(x+y-1)(2x+y+3)$

(2) 与式$=(x+2y)^2-5z(x+2y)-6z^2$

$=\{(x+2y)+z\}\{(x+2y)-6z\}$

$=(x+2y+z)(x+2y-6z)$

(3) 与式$=x^2+(2y+2z)x+(y^2+2yz-3z^2)$

$=x^2+(2y+2z)x+(y-z)(y+3z)$

$=\{x+(y-z)\}\{x+(y+3z)\}$

$=(x+y-z)(x+y+3z)$

別解　与式$=(x+y+z)^2-4z^2$

$=(x+y+z+2z)(x+y+z-2z)$

$=(x+y+3z)(x+y-z)$

演習問題９

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ であるから

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=2^2-2\cdot(-1)$

$=6$

演習問題１０

(1)　与式$=(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2$

$$=3+2\sqrt{2}-3$$
$$=2\sqrt{2}$$

(2)　与式$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

演習問題１１

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

$2^2<5<3^2$ であるから　　$2<\sqrt{5}<3$

よって，$\sqrt{5}$ の整数部分が 2 であるから

$$a=4$$
$$b=(\sqrt{5}+2)-4=\sqrt{5}-2$$

(2)　$b^3=(\sqrt{5}-2)^3$

$$=(\sqrt{5})^3-3\cdot(\sqrt{5})^2\cdot 2+3\cdot\sqrt{5}\cdot 2^2-2^3$$
$$=5\sqrt{5}-30+12\sqrt{5}-8$$
$$=-38+17\sqrt{5}$$

$b^4-2b^2+1=(b^2-1)^2=\{(b+1)(b-1)\}^2$

$$=\{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-3)\}^2$$
$$=(5-4\sqrt{5}+3)^2$$
$$=\{4(2-\sqrt{5})\}^2$$
$$=16(4-4\sqrt{5}+5)$$
$$=144-64\sqrt{5}$$

演習問題１２

[1]　$x<0$ のとき

方程式は　　$-x-2(x-2)=x+2$

これを解くと　　$x=\dfrac{1}{2}$

これは，$x<0$ を満たさない。

[2]　$0\leqq x<2$ のとき

方程式は　　$x-2(x-2)=x+2$

これを解くと　　$x=1$

これは，$0\leqq x<2$ を満たす。

[3]　$2\leqq x$ のとき

方程式は　　$x+2(x-2)=x+2$

これを解くと　　$x=3$

これは，$2\leqq x$ を満たす。

[1]～[3] から，求める解は　　$x=1,\ 3$

演習問題１３

(1)　$|2x-3|\leqq a$ から

$$-a\leqq 2x-3\leqq a$$

各辺に 3 を加えて　$-a+3\leqq 2x\leqq a+3$

各辺を 2 で割って　$\dfrac{-a+3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{a+3}{2}$

(2)　$a=4$ のとき，① の解は　$\dfrac{-4+3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{4+3}{2}$

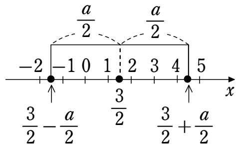
よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{7}{2}$

これを満たす整数 x は $0,\ 1,\ 2,\ 3$ であるから　4 個

(3)　① の解は　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{2}$

① の解は，数直線上で $\dfrac{3}{2}$ からの距離が $\dfrac{a}{2}$ 以下である実数である。よって，① を満たす整数 x の個数が 6 となる条件は

$$4\leqq\frac{3}{2}+\frac{a}{2}<5$$



各辺に 2 を掛けて

$$8\leqq 3+a<10$$

各辺から 3 を引いて

$$5\leqq a<7$$

参考　① の両辺を 2 で割ると　$\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\leqq\dfrac{a}{2}$

この式からも，① の解が数直線上で $\dfrac{3}{2}$ からの距離が $\dfrac{a}{2}$ 以下である実数であることがわかる。

第２章　集合と命題

問・練習・深める

練習１

(1)　$3 \in Q$　　(2)　$\sqrt{2} \notin Q$　　(3)　$-\dfrac{3}{2} \in Q$

練習２

(1)　$F=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$
(2)　$G=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
(3)　$H=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots\}$

(p.53) 深める
例）$B=\{2n-1 \mid n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 50\}$
例）$C=\{5n \mid n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$

練習３

(1)　$B=\{1,\ 2,\ 4\}$ であるから　　$B \subset A$
(2)　$C=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ であるから　　$A=C$
(3)　$D=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$ であるから
　　$A \subset D$

練習４

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,\ 2\}$，$\{1,\ 3\}$，$\{2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

練習５

(1)　$A \cap B=\{5,\ 15\}$
　　$A \cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 15\}$
(2)　$A \cap B=\{x \mid -1<x \leqq 2,\ x\text{ は実数}\}$
　　$A \cup B=\{x \mid -2 \leqq x<3,\ x\text{ は実数}\}$

問１

$A \cap B \cap C=\{3,\ 5\}$
$A \cup B \cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 11\}$

練習６

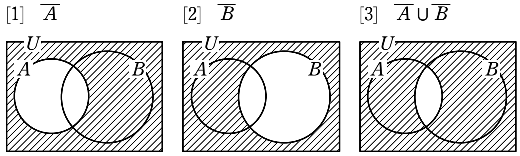
$A \cap B \cap C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
$A \cup B \cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 12,\ 18\}$

練習７

(1)　$\overline{A}=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$
(2)　$\overline{B}=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(3)　$\overline{A} \cap \overline{B}=\{1,\ 6,\ 8,\ 9\}$
(4)　$\overline{A} \cup \overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(5)　$\overline{A} \cap B=\{4\}$　　(6)　$A \cap \overline{B}=\{2,\ 7\}$
(7)　$A \cup \overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(8)　$\overline{A} \cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

練習８

$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は，それぞれ図[1]と図[2]の斜線部分であり，その和集合 $\overline{A} \cup \overline{B}$ は，図[3]の斜線部分である。
また，図[3]の白い部分は $A \cap B$ であるから，図[3]の斜線部分は $\overline{A \cap B}$ で
$$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$$
が成り立つ。



練習９

$\overline{A \cup B}=\{1,\ 5,\ 7\}$，$\overline{A} \cap \overline{B}=\{1,\ 5,\ 7\}$
よって，$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$ が成り立つ。
　$\overline{A \cap B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$，
　$\overline{A} \cup \overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$
よって，$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つ。

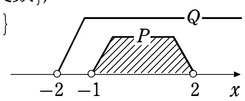
練習１０

(1)　偽　($x=-2$ のときも $x^2=4$ が成り立つ)
(2)　真　($x-y=0$ から $(x+y)(x-y)=0$)
(3)　真　(長方形は４つの内角がすべて直角であるから，向かい合う２組の辺はそれぞれ平行)

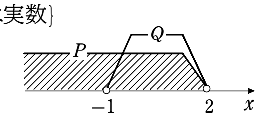
(p.58) 深める
大きい数であるかどうかの基準がなく，真偽が明確に定まらない。よって，命題ではない。

練習１１

(1)　$P=\{x \mid -1<x<2,\ x\text{ は実数}\}$，
　$Q=\{x \mid x>-2,\ x\text{ は実数}\}$
とすると，$P \subset Q$ が成り立つ。
よって，命題は真である。



(2)　$P=\{x \mid x<2,\ x\text{ は実数}\}$，
　$Q=\{x \mid -1<x<2,\ x\text{ は実数}\}$
とすると，$P \subset Q$ は成り立たない。
よって，命題は偽である。



練習１２

２は素数であるが，奇数ではない。
よって，$n=2$ は反例であるから，命題は偽である。

(p.61) 深める
(1)　例）$2<x<3$
(2)　例）$0<x<5$

練習１３

(1)　十分条件であるが必要条件ではない
(2)　必要条件でも十分条件でもない
(3)　必要条件であるが十分条件ではない
(4)　必要十分条件である

練習１４

(1)　$x>-3$
(2)　$x+y \leqq 0$
(3)　x は有理数である

練習１５

(1)　$x=0$ または $y=0$

(2)　「$x>2$ かつ $x<5$」　すなわち　$2<x<5$

(3)　x，y はともに無理数である

練習１６

(1)　命題：真

逆　：$xy=0 \Longrightarrow x=0$　偽

(反例：$x=1$，$y=0$)

対偶：$xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$　真

裏：　$x \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$　偽

(反例：$x=1$，$y=0$)

(2)　命題：偽　(反例：$x=-1$，$y=-1$)

逆　：「$x>0$ かつ $y>0$」 $\Longrightarrow xy>0$　真

対偶：「$x \leqq 0$ または $y \leqq 0$」 $\Longrightarrow xy \leqq 0$　偽

(反例：$x=-1$，$y=-1$)

裏：　$xy \leqq 0 \Longrightarrow$「$x \leqq 0$ または $y \leqq 0$」　真

(3)　命題：真

逆　：$(x-1)(y-2)=0$

$\Longrightarrow$「$x=1$ または $y=2$」　真

対偶：$(x-1)(y-2) \neq 0$

$\Longrightarrow$「$x \neq 1$ かつ $y \neq 2$」　真

裏：　「$x \neq 1$ かつ $y \neq 2$」

$\Longrightarrow (x-1)(y-2) \neq 0$　真

練習１７

対偶「n が偶数ならば，n^2 は偶数である」を証明する。

n が偶数のとき，n はある整数 k を用いて $n=2k$ と表される。このとき

$$n^2=(2k)^2=2 \cdot 2k^2$$

$2k^2$ は整数であるから，n^2 は偶数である。

よって，対偶は真である。

したがって，もとの命題は真である。

練習１８

対偶「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」 $\Longrightarrow x+y \leqq 0$

は真である。したがって，もとの命題は真である。

練習１９

$\sqrt{\pi}$ は無理数でないと仮定すると，$\sqrt{\pi}$ は有理数である。

その有理数を r とすると　$\sqrt{\pi}=r$

両辺を２乗すると　　　$\pi=r^2$

r が有理数のとき r^2 は有理数であるから，この等式は π が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{\pi}$ は無理数である。

練習２０

$\sqrt{3}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，1 以外に正の公約数をもたない 2 つの自然数 a，b を用いて $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$ と表される。

このとき　　$a=\sqrt{3}\,b$

両辺を 2 乗すると　　$a^2=3b^2$ ……①

よって，a^2 は 3 の倍数，したがって，a も 3 の倍数である。

ゆえに，a は，ある自然数 c を用いて

$$a=3c \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。

② を ① に代入すると　　$9c^2=3b^2$

すなわち　　　　　　$b^2=3c^2$

よって，b^2 は 3 の倍数，したがって，b も 3 の倍数である。

a と b はともに 3 の倍数であり，公約数 3 をもつ。

このことは，a と b が 1 以外に正の公約数をもたないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}$ は無理数である。

(p.68) 発展　練習１

(1)　与えられた命題の否定は

ある実数 x について $x+1 \leqq 0$

$x=-2$ のとき，$x+1 \leqq 0$ である。

したがって，もとの命題は偽であり，その否定は真である。

(2)　与えられた命題の否定は

すべての素数 n について $n+2$ は素数でない。

$n=3$ のとき，$n+2$ は素数である。

したがって，もとの命題は真であり，その否定は偽である。

問題（p.69）

問題１

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ である。

(1)　$A \cup B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ であるから

$\overline{A \cup B}=\{1,\ 4,\ 9\}$

(2)　$\overline{A}=\{1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\}$，$\overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9\}$ であるから

$\overline{A} \cup \overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

別解　$A \cap B=\{5\}$ であるから

$\overline{A} \cup \overline{B}=\overline{A \cap B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(3)　$\overline{A} \cap B=\{6,\ 7\}$

(4)　$A \cap B \cap C=\{5\}$

(5)　$A \cup B \cup C=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(6)　$A \cap B=\{5\}$，$\overline{C}=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8\}$ であるから

$A \cap B \cap \overline{C}=\varnothing$

問題２

(1)　「△ABC が二等辺三角形 $\Longrightarrow$ △ABC は正三角形」は偽。(反例：直角二等辺三角形)

「△ABC が正三角形 $\Longrightarrow$ △ABC は二等辺三角形」は真。

よって，△ABC が二等辺三角形であることは，△ABC が正三角形であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(2)　$x^2+y^2=2xy \iff x^2-2xy+y^2=0$

$$\iff (x-y)^2=0$$
$$\iff x=y$$

よって，$x=y$ と $x^2+y^2=2xy$ は同値である。
ゆえに，$x=y$ は $x^2+y^2=2xy$ であるための必要十分条件である。

(3)　「$x+y>2 \implies$ 「$x>1$ または $y>1$」」は真。
(対偶「「$x\leqq 1$ かつ $y\leqq 1$」 $\implies$ $x+y\leqq 2$」は真。)
「「$x>1$ または $y>1$」 $\implies$ $x+y>2$」は偽。
(反例：$x=2$，$y=-2$)
よって，$x+y>2$ は，「$x>1$ または $y>1$」であるための十分条件であるが必要条件ではない。

問題３
対偶「n が 3 の倍数でないならば，n^2 は 3 の倍数でない」を証明する。
n が 3 の倍数でないとき，n はある整数 k を用いて，$n=3k+1$ または $n=3k+2$ と表される。
[1]　$n=3k+1$ のとき

$$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$

[2]　$n=3k+2$ のとき

$$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$$

$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ はともに整数であるから，[1]，[2] のいずれの場合も n^2 は 3 の倍数でない。
よって，対偶は真である。
したがって，もとの命題は真である。

問題４
(1)　$b\fallingdotseq 0$ と仮定すると，等式 $a+b\sqrt{2}=0$ は

$$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$$

と変形できる。ここで，a，b は有理数であるから，
$-\dfrac{a}{b}$ も有理数である。
このことは，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。
ゆえに　　$b=0$
次に，$b=0$ とすると，$a+0\cdot\sqrt{2}=0$ から　$a=0$
したがって，命題「$a+b\sqrt{2}=0 \implies a=b=0$」は真である。

(2)　$a+b\sqrt{2}=-1+3\sqrt{2}$ から

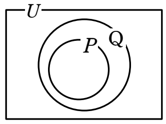
$$(a+1)+(b-3)\sqrt{2}=0$$

a，b が有理数ならば，$a+1$，$b-3$ はともに有理数である。また，$\sqrt{2}$ は無理数である。
よって，(1) で証明したことから

$$a+1=0,\ b-3=0$$

ゆえに　　$a=-1$，$b=3$
（このとき，$(a+1)+(b-3)\sqrt{2}=0$ である。）

問題５
命題 $p \implies q$ が真であるとき，
P，Q は右の図のようになる。
よって，P，Q について，常に成り立つのは
　　②，⑤，⑥，⑨



演習問題（p.70，p.71）

演習問題１
(1)　$a^2+3=7$ から　$a=\pm 2$
$a=2$ のとき，$A=\{2,\ 6,\ 7\}$，$B=\{3,\ 7,\ 2,\ 6\}$ となり，$A\cap B=\{2,\ 7\}$ を満たさない。
$a=-2$ のとき，$A=\{2,\ 6,\ 7\}$，$B=\{3,\ 7,\ -2,\ 2\}$ となり，$A\cap B=\{2,\ 7\}$ を満たす。
よって　$a=-2$

(2)　$A=\{2,\ 6,\ 7\}$，$B=\{3,\ 7,\ -2,\ 2\}$ であるから

$$A\cup B=\{-2,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7\}$$

(3)　$\overline{A}\cap B$ は，B から $A\cap B=\{2,\ 7\}$ を除いて

$$\overline{A}\cap B=\{-2,\ 3\}$$

演習問題２
(1)　3 と 4 の最小公倍数は 12 であるから，3 でも 4 でも割り切れることは，12 で割り切れることと同値である。よって　P
(2)　60 は 12 と 15 の最小公倍数であるから，60 で割り切れるということは，12 かつ 15 で割り切れることと同値である。よって　$P\cap Q$
(3)　15 で割り切れる自然数から，4 でも割り切れる自然数すなわち 60 で割り切れる自然数を除いたものである。すなわち，Q から $P\cap Q$ を除いた集合であるから　$\overline{P}\cap Q$

演習問題３
p：$m+n$ は偶数である
q：mn は偶数である
r：m，n はともに偶数である

(1)　「$m+n$ は偶数である $\implies$ m，n はともに偶数である」は偽である。(反例：$m=1$，$n=3$)
「m，n はともに偶数である $\implies$ $m+n$ は偶数である」は真である。よって，適するのは
　「必要条件であるが十分条件ではない」

(2)　(1) より，$p \implies r$ は偽，$r \implies p$ は真であるから
，　それらの対偶を考えると

$$\overline{p} \implies \overline{r}\ \text{は真，}\ \overline{r} \implies \overline{p}\ \text{は偽}$$

よって，適するのは
　「十分条件であるが必要条件ではない」

(3)　　p：(m，n はともにに偶数である) または
　　　(m，n はともに奇数である)
である。
m，n がともに偶数のとき q は成り立つが，m，n がともに奇数のとき q は成り立たないから
　　p かつ q：m，n はともに偶数である

である。したがって，「p かつ q」と r は同値である。よって，適するのは　「必要十分条件である」

(4)　$\overline{q}$：mn は奇数である

であるから

$\overline{q}$：m，n はともに奇数である

また

p：(m，n はともに偶数である) または (m，n はともに奇数である)

であるから

p または $\overline{q}$：(m，n はともに偶数である) または (m，n はともに奇数である)

すなわち，(p または $\overline{q}$) は p と同じ条件である。

(1) より，$p \Longrightarrow r$ は偽，$r \Longrightarrow p$ は真であるから，

(p または $\overline{q}$) $\Longrightarrow r$ は偽であり，

$r \Longrightarrow$ (p または $\overline{q}$) は真である。

よって，適するのは

「必要条件であるが十分条件ではない」

演習問題４

$x^2-y^2=1$ を満たす自然数 x，y の組は存在すると仮定する。このとき，$x^2-y^2=1$ から

$$(x+y)(x-y)=1$$

$x+y$，$x-y$ は整数であるから

($x+y=1$ かつ $x-y=1$) または

($x+y=-1$ かつ $x-y=-1$)

$x+y=1$ かつ $x-y=1$ のとき　　$x=1$，$y=0$

$x+y=-1$ かつ $x-y=-1$ のとき　$x=-1$，$y=0$

いずれも x，y が自然数であることに矛盾する。

したがって，$x^2-y^2=1$ を満たす自然数 x，y の組は存在しない。

参考　仮定より，$x+y>0$，$(x+y)(x-y)=1$ であるから，$x+y=1$ かつ $x-y=1$ としてもよい。

演習問題５

(1)　偽，反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ のとき　$a+b=0$

(2)　真

証明　対偶「$a+b$，$a-b$ がともに有理数ならば，a，b の少なくとも一方は有理数である」　…… (A)

を証明する。

$a+b$，$a-b$ は有理数であるから，p，q を有理数として

$$p=a+b,\ q=a-b$$

とおくことができる。これを a，b について解くと

$$a=\frac{p+q}{2},\ b=\frac{p-q}{2}$$

p，q はともに有理数であるから，a，b もともに有理数である。

「a，b がともに有理数ならば，a，b の少なくとも一方は有理数である」は真であるから，命題 (A) は真である。

したがって，与えられた命題は真である。

(3)　偽，反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ のとき

$a+b=0$，$ab=-2$

(4)　偽，反例：$a=0$，$b=\sqrt{2}$ のとき　$ab=0$

演習問題６

a，b，c がすべて奇数であると仮定すると，整数 l，m，n を用いて

$$a=2l+1,\ b=2m+1,\ c=2n+1$$

と表される。$a^2+b^2=c^2$ に代入すると

$$(2l+1)^2+(2m+1)^2=(2n+1)^2$$

整理すると

$$2(2l^2+2l+2m^2+2m+1)=2(2n^2+2n)+1$$

この等式の左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾している。したがって，a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数である。